27/11/2017

Μάθημα 14º

ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ.

(E): $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$
$a_i, b \in C(I)$, $a_n(t) \neq 0$ $t \in I$.

μερική λύση → μια οποιαδήποτε.
γενική λύση → γενικός τύπος.

Πρόταση (Θεώρημα 12)
Ας είναι y_1 μια μερική λύση της (E) τότε η y είναι λύση της (E) αν και μόνο αν υπάρχει y_0 λύση της (E_0) τ.ω. $\boxed{y = y_1 + y_0.}$

(Αν έχουμε μια μερική λύση τότε μπορούμε να τις βρούμε όλες)

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Ας είναι y_1 μια μερική λύση της (E)
Αν y είναι μια (άλλη λύση) της (E) τότε:

$$L(y - y_1) = L(y) - L(y_1) = b - b = 0$$

Άρα η συνάρτηση $y_0 = y - y_1$ είναι μια λύση της (E_0) και $y = y_0 + y_1$

$\Leftarrow$) Ας είναι y_1 μια μερική λύση της (E) και y_0 μια λύση της (E_0) για $y = y_0 + y_1$ είναι

$$L(y) = L(y_0 + y_1) = L(y_0) + L(y_1) = b + b = b$$

άρα η y είναι λύση της E.

!!!

Πρόταση (Θεώρημα 14)

Ας είναι $\{y_1, \dots, y_n\}$ ένα Β.Σ.Λ. της E_0.

Αν $v_1, \dots, v_n$ είναι λύσεις του συστήματος

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' + \dots + y_n v_n' = 0$$

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + \dots + y_n' v_n' = 0$$

$$\dots$$

$$y_1^{(n-2)} v_1' + y_2^{(n-2)} v_2' + \dots + y_n^{(n-2)} v_n' = 0$$

$$y_1^{(n-1)} v_1' + y_2^{(n-1)} v_2' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n' = -\frac{b}{a_n}$$

$n \times n$ γραμμικό μη ομογενές σύστημα

ορίζουσα συστήματος $\to$ Wronski $\to$ δε μηδενίζεται

πουθενά $\Rightarrow$ μια λύση

Τοτε ~~μια~~ μερική λύση της (Ε) είναι η $y = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$ (μεταβολή σταθερών)

$W_i \to$ Wronski με i-στήλη $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_i' = \frac{\frac{b}{a_n} W_i(t)}{W(t)} \quad \text{σύστημα Cramer}$$

$t_0 \in I$

$$v_i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_i(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} \, ds, \quad t \in I.$$

$$\boxed{y(t) = y_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_1(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} \, ds + \dots + y_n(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_n(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} \, ds, \quad t \in I.}$$

Θεώρημα 15

γενική

Το $\boxed{\text{Θεώρημα 10}}$ είναι η πιο απλή περίπτωση του τύπου

ειδος

<u>Παράδειγμα 5</u> (Διαφορετικός τρόπος επίλυσης)

$y'' - 2y' + y = e^x \quad , \; x \in \mathbb{R}.$

Να βρεθεί η μερική λύση y_μ που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$y_\mu(0) = 0 \quad , \quad y'_\mu(0) = 1$, αν είναι γνωστό

ότι οι $y_1 = e^x$, $y_2 = x \cdot e^x$ αποτελούν

ένα Β.Σ.Λ. της αντίστοιχης ομογενούς γδ.ε.

<u>Λύση</u> (Τις y_1, y_2 μπορούμε να τις βρούμε με υποβιβασμό)

Χρειάζομαι ορίζουσα Wronski (όπου $\neq 0$)

και ..., ..., ... για να εφαρμόσω

τον τύπο.

Έχουμε : $W(x) = \begin{vmatrix} e^x & x \cdot e^x \\ e^x & x \cdot e^x + e^x \end{vmatrix} =$

$= e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = e^{2x}$

$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \cdot e^x \\ 1 & e^x + x \cdot e^x \end{vmatrix} = -x \cdot e^x$

$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x$

Μια μερική λύση της (Ε) είναι η:

$$y_\mu(x) = y_1(x) \cdot \int_0^x \frac{W_1(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{a_n(s)}\, ds \; +$$

$$+\, y_2(x) \cdot \int_0^x \frac{W_2(s)}{W(s)} \cdot \frac{b(s)}{a_n(s)}\, ds$$

$$= e^x \cdot \int_0^x \frac{-s \cdot e^s}{e^{2s}} \cdot \frac{e^s}{1} + x \cdot e^x \int_0^x \frac{e^s}{e^{2s}} \cdot \frac{e^s}{1}\, ds$$

$$= e^x \int_0^x (-s)\, ds + x \cdot e^x \int_0^x ds = \frac{1}{2} x \cdot e^x, \; x \in \mathbb{R}$$

Άρα βρήκαμε:

$$W(x) = e^{2x}, \quad W_1(x) = -x \cdot e^x, \quad W_2(x) = e^x$$

$$y_\mu(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Όλες οι λύσεις της (E) δίνονται από τον τύπο

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για την μερική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν έχουμε:

$$y_\mu = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y_\mu' = x \cdot e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x + c_1 e^x + c_2(x \cdot e^x + e^x)$$

$$y_\mu'(0) = 1$$

$$1 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = 1$$

$$y_\mu(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x + x \cdot e^x.$$